Compito di Geometria e algebra lineare del 16 luglio 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Considera $\mathbb{R}^3$ dotato dell'usuale prodotto scalare euclideo. Dimostra che una isometria vettoriale di $\mathbb{R}^3$ avente determinante 1 è necessariamente una rotazione intorno ad un asse.

Esercizio 2. Determina una matrice A di taglia 3×3 tale che l'endomorfismo $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L_A(x) = Ax$ soddisfi le proprietà seguenti:

- $\operatorname{Im} L_A \cap \ker L_A = \operatorname{Span}(e_1 - e_2)$,
- A non è nilpotente.

Esercizio 3. Considera su $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare $g_\lambda(x, y) = {}^t x A_\lambda y$ dove A_λ è la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$. Considera l'endomorfismo $L_{B_{\lambda,a}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L_{B_{\lambda,a}}(x) = B_{\lambda,a}x$, dove $B_{\lambda,a}$ è una matrice che dipende da due parametri $a, \lambda \in \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$B_{\lambda,a} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 2 & \lambda+1 \\ \lambda^2 & \lambda+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Dimostra che se $\lambda \neq 0$ allora $L_{B_{\lambda,a}}$ è autoaggiunto rispetto a g_λ per ogni a.
(2) Dimostra che se $\lambda \neq 0$ allora $L_{B_{\lambda,a}}$ è diagonalizzabile per ogni a.

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale formato dai polinomi a coefficienti reali di grado $\leqslant 3$. Considera il prodotto scalare

$$g(p, q) = p(1)q(-1) + p(-1)q(1).$$

(1) Determina una base del radicale di g.
(2) Determina la segnatura di g.
(3) Costruisci una base ortogonale che contenga il vettore $x^2 + 1$.

1. Soluzioni

Esercizio 1. Fatto a lezione.

Esercizio 2. Sappiamo che $\operatorname{Im} L_A$ e $\ker L_A$ sono due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ che si intersecano in una retta, e per il teorema della dimensione la somma delle loro dimensioni è 3. Quindi uno dei due spazi è una retta e l'altro è un piano che la contiene.

Se $\operatorname{Im} L_A$ è una retta e $\ker L_A$ un piano che la contiene, dall'inclusione $\operatorname{Im} L_A \subset \ker L_A$ deduciamo facilmente che $A^2 = 0$ e quindi L_A è nilpotente. Quindi questa strada non va bene.

Cerchiamo allora un esempio in cui $\ker L_A$ è la retta $\operatorname{Span}(e_1 - e_2)$ e $\operatorname{Im} L_A$ è un piano che la contiene. Ad esempio questa matrice funziona:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice non è nilpotente perché ha autovalore 1.

Esercizio 3. Per mostrare che $B_{\lambda,a}$ è autoaggiunto dobbiamo verificare che
$$^{t}(B_{\lambda,a}x)A_\lambda y = {}^{t}xA_\lambda B_{\lambda,a}y$$
per ogni $x, y \in \mathbb{R}^3$. Riscriviamo l'equazione nel modo seguente:
$$^{t}x\,{}^{t}B_{\lambda,a}A_\lambda y = {}^{t}xA_\lambda B_{\lambda,a}y.$$
Questa equazione è verificata per ogni x, y perché
$$^{t}B_{\lambda,a}A_\lambda = A_\lambda B_{\lambda,a}.$$
Questa uguaglianza si dimostra facilmente svolgendo i due prodotti fra matrici. Per il teorema spettrale, un operatore autoaggiunto è sempre diagonalizzabile se il prodotto scalare è definito positivo. Il prodotto g_λ è definito positivo perché $\lambda \neq 0$. Questo conclude i punti (1) e (2).

Esercizio 4. La matrice associata rispetto alla base canonica $\{1, x, x^2, x^3\}$ è
$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
La matrice ha rango due e quindi il radicale ha dimensione 2 ed è generato da
$$1 - x^2, \quad x - x^3.$$
Per calcolare la segnatura è sufficiente notare che esistono sia elementi positivi che negativi della base canonica, quindi $i_+ \geqslant 1$ e $i_- \geqslant 1$ e deduciamo che la segnatura può essere solo $(1, 1, 2)$.

Il vettore $x^2 + 1$ non è nel radicale. Per costruire una base ortogonale che contenga $x^2 + 1$ è sufficiente trovare un altro vettore che sia ortogonale a $x^2 + 1$ ma che non sia nel radicale, ad esempio $x^3 + x$. I vettori
$$1 - x^2, \quad x - x^3, \quad x^2 + 1, \quad x^3 + x$$
formano una base ortogonale.